

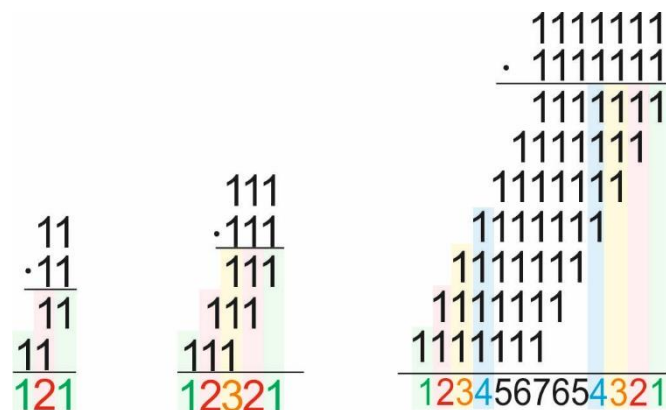
Kouzelná čísla I.

1. Ve videu se mluví o kouzelných jedničkách. Jejich násobením dostaneme následující rovnosti:

$$\begin{aligned}
 1 \cdot 1 &= 1 \\
 11 \cdot 11 &= 121 \\
 111 \cdot 111 &= 12321 \\
 1111 \cdot 1111 &= 1234321 \\
 11111 \cdot 11111 &= 123454321 \\
 111111 \cdot 111111 &= 12345654321 \\
 1111111 \cdot 1111111 &= 1234567654321
 \end{aligned}$$

Umíte vysvětlit, proč jsou všechny součiny takto „symetrické“?

Ke zdůvodnění můžeme použít algoritmus písemného násobení.



Stačí si uvědomit, že v tomto případě v podstatě algoritmus písemného násobení postupně „posouvá“ soubor jedniček vlevo. Hodnoty v jednotlivých řádech jsou dány počtem jedniček v daném sloupečku (řádu).

2. Umíte na základě předchozího příkladu napsat (bez počítání) výsledky následujících součinů?

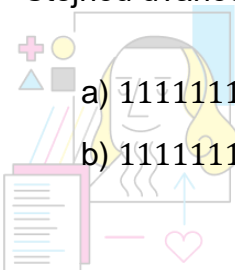
a) $11111111 \cdot 11111111 =$

b) $111111111 \cdot 111111111 =$

Stejnou úvahou jako v předchozí úloze dostaneme výsledky součinů

a) $111111111 \cdot 111111111 = 123456787645321$

b) $1111111111 \cdot 1111111111 = 12345678987654321$



3. Ve videu se mluví o kouzelném čísle 9. Násobením číslem 9 dostaneme následující rovnosti, které vykazují pozoruhodné souvislosti:

$$\begin{aligned}
 1 \cdot 9 + 2 &= 11 \\
 12 \cdot 9 + 3 &= 111 \\
 123 \cdot 9 + 4 &= 1111 \\
 1234 \cdot 9 + 5 &= 11111 \\
 12345 \cdot 9 + 6 &= 111111 \\
 123456 \cdot 9 + 7 &= 1111111 \\
 1234567 \cdot 9 + 8 &= 11111111 \\
 12345678 \cdot 9 + 9 &= 111111111 \\
 123456789 \cdot 9 + 10 &= 1111111111
 \end{aligned}$$

Umíte tuto pozoruhodnost vysvětlit?

Vypočítáme-li si rozdíly sousedních čísel na pravé straně uvedených rovností, dostaneme

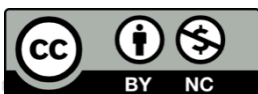
$$111 - 11 = 100, \quad 1111 - 111 = 1000, \quad 11111 - 11111 = 10000, \dots$$

Vidíme, že rozdíl dvou sousedních členů je tvaru $1\dots00$, tedy postupně přidáváme 100, 1000, 10000, atd. Vzhledem k tomu, že násobíme číslem 9, platí:

$$\begin{array}{r}
 11 \\
 \cdot 9 \\
 \hline
 99
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 111 \\
 \cdot 9 \\
 \hline
 999
 \end{array}
 \quad \dots \quad
 \begin{array}{r}
 11\dots11 \\
 \cdot 9 \\
 \hline
 99\dots99
 \end{array}$$

Nyní už jen stačí vhodně upravit levou stranu uvedených rovností a kouzlo je odhaleno.

$$\begin{aligned}
 11 &= 1 \cdot 9 + 2 \\
 111 &= 12 \cdot 9 + 3 = 11 \cdot 9 + 1 \cdot 9 + 2 + 1 = 99 + 11 + 1 = 100 + 11 \\
 1111 &= 123 \cdot 9 + 4 = 111 \cdot 9 + 12 \cdot 9 + 3 + 1 = 999 + 111 + 1 = 1000 + 111 \\
 11111 &= 1234 \cdot 9 + 5 = 1111 \cdot 9 + 123 \cdot 9 + 4 + 1 = 9999 + 1111 + 1 = 10000 + 1111
 \end{aligned}$$



Autoři: Eduard Fuchs, Pavel Tlustý, Eva Zelendová

Toto dílo je licencováno pod licencí Creative Commons [CC BY-NC 4.0]. Licenční podmínky navštivte na adrese [https://creativecommons.org/choose/?lang=cs].

