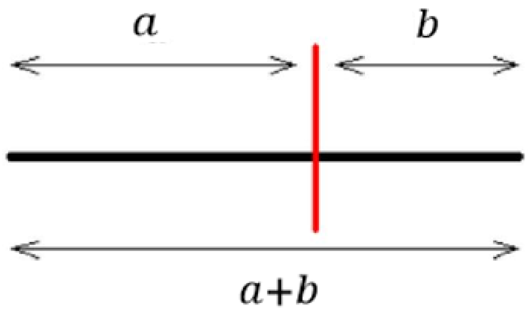
Fibonacciho posloupnost a zlatý řez

1. Představte si, že máte rozdělit úsečku na dvě části tak, aby poměr délek celé úsečky a delší části rozdělené úsečky byl stejný, jako poměr delší a kratší části. Tento poměr se nazývá **zlatý řez**. Dovedete hodnotu zlatého řezu vypočítat?



Rozdělíme-li danou úsečku na úseky délek *a, b,* platí pro zlatý řez vztah

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}\ ,$$

kde hodnota φ zlatého řezu je rovna podílu $\frac{a}{b}$. Z uvedené rovnosti dostáváme

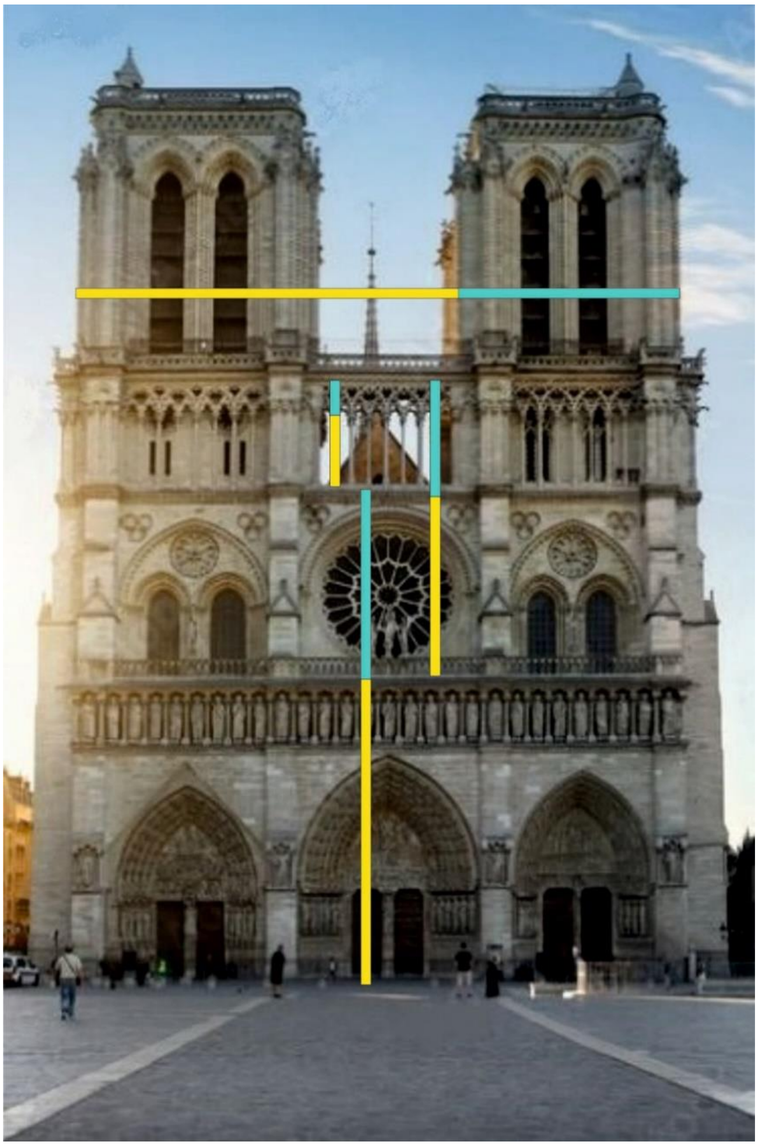
$$1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi, \text{ tj. } \varphi^2 - \varphi - 1 = 0.$$

Odtud

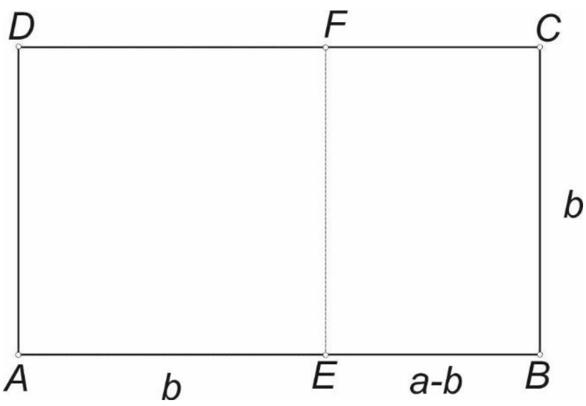
$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sim 1{,}618\ .$$

2. Zlatý řez hrál od starověku důležitou roli například ve výtvarném umění a v architektuře, neboť panuje přesvědčení, že tento poměr působí na člověka příznivým dojmem. Najdete zlatý řez na věži v Torontu nebo na katedrále Notre Dame v Paříži?

Na televizních věžích a obdobných stavbách je restaurace nebo vyhlídková plošina standardně umisťována tak, že rozděluje věž v poměru zlatého řezu. Tak je to i na věži v Torontu. Na katedrále Notre Dame je zlatých řezů více (viz následující obrázky).



3. Obdélník ABCD rozdělme na čtverec AEFD a obdélník EBCF, tak jak je to znázorněno na obrázku. Kdy platí, že obdélníky ABCD a EBCF jsou podobné?



Označíme-li délky sousedních stran obdélníku *ABCD* jako *a* a *b*, jsou délky sousedních stran obdélníku *EBCF* *a* – *b*, *b* (viz obr.). Aby byly tyto obdélníky podobné, musí platit

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}, \quad \text{tj.} \; \frac{b}{a} = \frac{a-b}{b} = \frac{a}{b} - 1.$$

Když označíme $\alpha = \dfrac{a}{b}$, můžeme poslední rovnost přepsat na tvar $\dfrac{1}{\alpha} = \alpha - 1$, tj.

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

Tuto kvadratická rovnice jsme řešili již v úloze 1 a víme, že má řešení $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Strany obdélníka *ABCD* tedy musí být v poměru zlatého řezu.

4. Představte si, že úsečku dlouhou jeden metr prodloužíme o půl metru a pak ještě o třetinu metru, poté o čtvrtinu metru, o pětinu metru atd. Odhadnete, zda někdy dosáhneme délky jednoho kilometru? Pokuste se svůj odhad zdůvodnit!

Výsledek je možná překvapivý. Nejen, že můžeme po dostatečně velkém počtu kroků získat úsečku o délce jednoho kilometru. Ukážeme, že uvedeným postupem lze získat libovolně dlouhou úsečku.

Prvním prodloužením metrové úsečky ji prodloužíme o půl metru. Přiložením třetí a čtvrté úsečky ji prodloužíme (v metrech) o $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, tedy o více než půl metru.

V dalších čtyřech krocích ji však opět prodloužíme o více než půl metru, neboť

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Přiložením 16 dalších úseček opět úsečku prodloužíme o více než o půl metru atd. Vždy tak můžeme získanou úsečku prodloužit o více než půl metru. Dostatečným počtem těchto prodloužení tak můžeme dosáhnout libovolnou předem určenou vzdálenost.

Autoři: Eduard Fuchs, Pavel Tlustý, Eva Zelendová