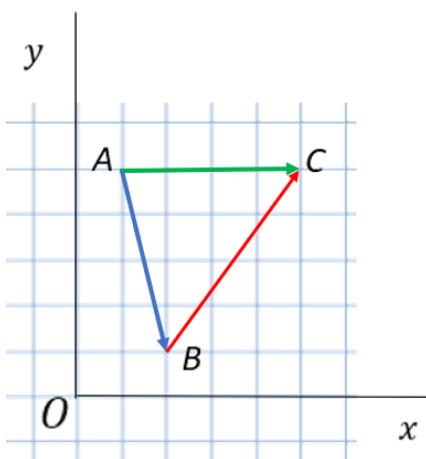


Středověká náměstí – SŠ – řešení

- Náměstí v historickém středu Českých Budějovic je pojmenováno po zakladateli města, českém králi Přemyslu Otakaru II. Uprostřed náměstí se nachází plocha zvýrazněná keramickou dlažbou. Pro jednoduchost si ji představme jako čtverec (nebudeme brát v úvahu „seříznuté“ rohy), který má rozměry 80×80 metrů. Samsonova kašna byla zbudována ve 20. letech 18. století uprostřed náměstí. Na fotografii jsou na náměstí vyznačeny dva vektory. Zakreslete je do systému souřadnic. Zapište souřadnice počátečního bodu A a koncových bodů B , C těchto vektorů. Určete úhel, který modrý a zelený vektor svírají a vzdálenost koncových bodů těchto vektorů v metrech.



Souřadnice zakreslených bodů:

$$A [1 ; 5]$$

$$B [2 ; 1]$$

$$C [5 ; 5]$$

K výpočtu úhlu, který svírá modrý a zelený vektor, využijeme vztah

$$\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|}$$

$$\vec{AB} = B - A = (2 - 1 ; 1 - 5) = (1 ; -4)$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$$

$$\vec{AC} = C - A = (5 - 1 ; 5 - 5) = (4 ; 0)$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{16} = 4$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{1 \cdot 4 + (-4 \cdot 0)}{\sqrt{17} \cdot 4} = \frac{1}{\sqrt{17}} \sim 0,2425$$

Zelený a modrý vektor svírají přibližně úhel 76 stupňů.

Vzdálenost bodů B a C určíme pomocí velikosti vektoru BC :

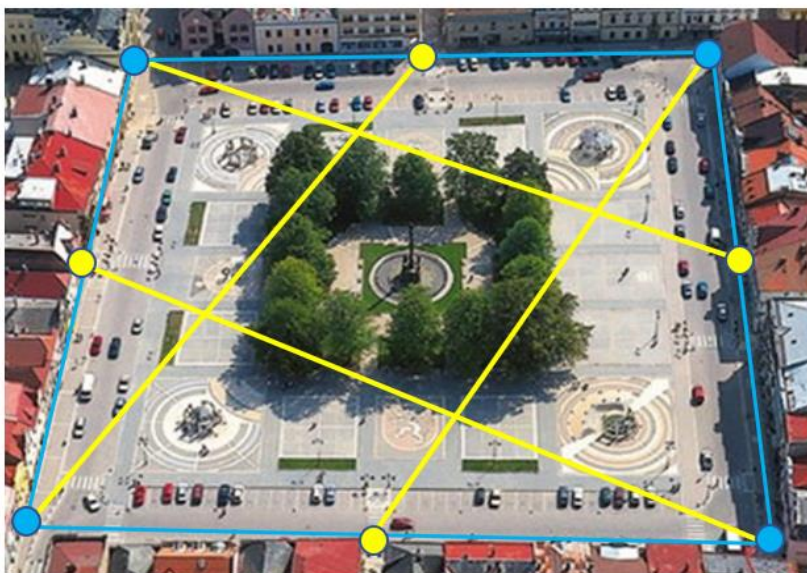
$$\vec{BC} = C - B = (5 - 2; 5 - 1) = (3; 4)$$

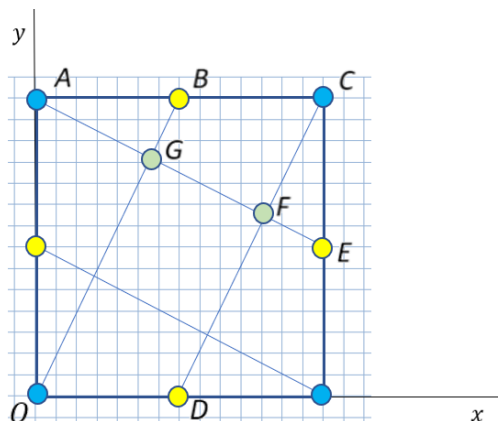
$$|\vec{BC}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Z fotografie náměstí a údajů v zadání úlohy je zřejmé, že délka strany čtverců, které jsou dlažbou zvýrazněny, je rovna osmi metrům. Proto musíme vzdálenost vypočtenou pomocí zakreslených bodů vynásobit osmi.

Vzdálenost koncových bodů vektorů vyznačených na náměstí je 40 metrů.

2. Na fotografii je zachyceno historické čtvercové náměstí ve Vysokém Mýtě, které je výjimečné nejen svou rozlohou (2 hektary), ale i systémem ulic, které přibližně vedou do rohů náměstí a středů jeho stran. Jestliže spojíme vrcholy čtverce a středy stran (jak je to na fotografii vyznačeno), získáme uvnitř náměstí menší čtverec. Zakreslete danou situaci do systému souřadnic. Pomocí analytické geometrie určete, jakou část rozlohy náměstí zaujímá menší čtverec.





Protože budeme pouze porovnávat obsahy dvou čtverců, nemusíme počítat s přesnými rozměry náměstí. Můžeme si souřadnice vrcholů čtverce vhodně zvolit. Mohli bychom uvažovat jednotkový čtverec, vhodnější bude, když středy stran budou mít souřadnice celočíselné. Například:

$$O [0 ; 0] \quad A [0 ; 2]$$

$$B [1 ; 2] \quad C [2 ; 2]$$

$$D [1 ; 0] \quad E [2 ; 1]$$

Určíme souřadnice bodu G (průsečík přímek AE a OB) a souřadnice bodu F (průsečík přímek AE a CD).

Rovnice přímky OB :

$$\overrightarrow{OB} = B - O = (1 - 0 ; 2 - 0) = (1 ; 2) = \vec{s}$$

$$n_1x + n_2y + c = 0$$

$$2x - y + c = 0$$

Po dosazení souřadnic bodu O získáme rovnici přímky OB **$2x - y = 0$**

Rovnice přímky AE :

$$\overrightarrow{AE} = E - A = (2 - 0 ; 1 - 2) = (2 ; -1) = \vec{s}$$

$$n_1x + n_2y + c = 0$$

$$x + 2y + c = 0$$

Po dosazení souřadnic bodu A získáme rovnici přímky AE **$x + 2y - 4 = 0$**

Souřadnice průsečíku G získáme vyřešením soustavy rovnic

$$2x - y = 0$$

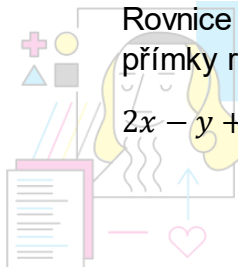
$$x + 2y - 4 = 0$$

$$G \left[\frac{4}{5} ; \frac{8}{5} \right]$$

Rovnici přímky AE již známe **$x + 2y - 4 = 0$**

Rovnice přímky CD musí mít stejný normálový vektor jako přímka OB , protože jsou tyto přímky rovnoběžné.

$$2x - y + c = 0$$



Po dosazení souřadnic bodu D získáme rovnici přímky CD $2x - y - 2 = 0$

Souřadnice průsečíku F získáme vyřešením soustavy rovnic

$$2x - y - 2 = 0$$

$$x + 2y - 4 = 0$$

$$F \left[\frac{8}{5}; \frac{6}{5} \right]$$

$$\vec{GF} = F - G = \left(\frac{8}{5} - \frac{4}{5}; \frac{6}{5} - \frac{8}{5} \right) = \left(\frac{4}{5}; -\frac{2}{5} \right)$$

$$|\vec{GF}|^2 = \frac{4}{5}$$

Protože obsah velkého čtverce je roven 4, představuje obsah malého čtverce jeho jednu pětinu.



Autoři: Eduard Fuchs, Pavel Tlustý, Eva Zelendová

Toto dílo je licencováno pod licencí Creative Commons [CC BY-NC 4.0]. Licenční podmínky navštivte na adrese [https://creativecommons.org/choose/?lang=cs].

