# Komponovat čísla – SŠ – řešení

1) Ve videu se mluví o *dodekafonii* (tzv. dvanáctitónové hudbě). Ta je založena na dvanáctitónových sekvencích, ve kterých musí být obsaženo všech dvanáct tónů stupnice, tj. žádný tón se nesmí opakovat.

a) Určete počet všech různých dvanáctitónových sekvencí.
b) Předpokládejme, že přehrání jedné takové sekvence trvá 5 sekund. Za jak dlouho bychom přehráli všechny různé dvanáctitónové sekvence?

a) Máme celkem 12 tónů - *c, cis, d, dis, e, f, fis, g, gis, a, b, h*.

Dvanáctitónovou sekvenci si můžeme znázornit pomocí 12 přihrádek (obr. 1), kde do každé přihrádky dáme právě jeden z nabízených tónů. Dvě sekvence považujeme za různé, pokud je aspoň v jedné přihrádce jiný tón.

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. | 11. | 12. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Obr. 1

K určení celkového počtu různých sekvencí užijeme následující úvahu: Do první přihrádky můžeme dát libovolný z 12 tónů (12 možností). Do druhé přihrádky vybíráme tón ze zbývajících 11 tónů (11 možností), do třetí libovolný ze zbylých 10 tónů (10 možností), …, do předposlední přihrádky vybereme jeden ze zbývajících dvou tónů (2 možnosti). Na poslední místo musíme dát poslední tón, který zbývá, máme tedy jedinou možnost. Podle kombinatorického pravidla součinu určíme celkový počet dvanáctitónových sekvencí jako

$$12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 479\,001\,600.$$

Poznámka: Uspořádaná *n*-tice sestavená z *n* různých prvků tak, že se v ní každý prvek vyskytuje právě jednou, se nazývá *permutace*. *P*(*n*) - počet všech možných permutací *n*-prvkové množiny vypočteme ze vzorce

$$P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

b) Z předchozí úlohy víme, že existuje celkem 479 001 600 různých dvanáctitónových sekvencí. Trvá-li přehrání jedné sekvence 5 sekund, pak všechny sekvence přehrajeme za

$$479\,001\,600 \cdot 5 = 2\,395\,008\,000 \text{ s},$$

což je téměř 76 let.

2) V roce 1787 zkomponoval Wolfgang Amadeus Mozart skladbu *Musikalischer Wurfelspiel* skládající se ze 176 taktů, které vybíral z předem zvolených taktů tvořících tabulku 1. Takty z tabulky 1 vybíral náhodně podle součtu padnutých teček při hodu dvěma kostkami. Takty uspořádával po osmi (A, B, …, H). Tedy např. pokud mu v prvním hodu (dané osmice) padl součet 5, začínala tato osmice taktem s číslem 40, pokud ve druhém hodu (sloupec B) padl součet 10, zvolil takt s číslem 142, atd.

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 96 | 22 | 141 | 41 | 105 | 122 | 11 | 30 |
| 3 | 32 | 6 | 128 | 63 | 146 | 46 | 134 | 81 |
| 4 | 69 | 95 | 158 | 13 | 153 | 55 | 110 | 24 |
| 5 | 40 | 17 | 113 | 85 | 161 | 2 | 159 | 100 |
| 6 | 148 | 74 | 163 | 45 | 80 | 97 | 36 | 107 |
| 7 | 104 | 157 | 27 | 167 | 154 | 68 | 118 | 91 |
| 8 | 152 | 60 | 171 | 53 | 99 | 133 | 21 | 127 |
| 9 | 119 | 84 | 114 | 50 | 140 | 86 | 169 | 94 |
| 10 | 98 | 142 | 42 | 156 | 75 | 129 | 62 | 123 |
| 11 | 3 | 87 | 165 | 61 | 135 | 47 | 147 | 33 |
| 12 | 54 | 180 | 10 | 103 | 28 | 37 | 106 | 5 |

tab. 1

a) Kolik různých osmic mohl Mozart takto vytvořit?
b) Kolik různých skladeb o 176 taktech lze takto vytvořit?
c) Která osmice taktů má největší šanci, že bude vytvořena?
d) Určete, s jakou pravděpodobností vznikne nejpravděpodobnější osmice taktů 104 – 157 – 27 – 167 – 154 - 68 – 118 – 91!

a) Nejprve si uvědomíme, že všechny takty v tab. 1 jsou různé. Při hodu dvěma kostkami můžeme dostat celkem 11 různých součtů (2, 3, …, 12, tab. 1 má 11 řádků). Postupujeme podobně jako v předchozí úloze – vytváříme osmice.

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

Do první přihrádky se může dostat libovolný takt z prvního (A) sloupce, tj. 11 možností. Podobně je tomu i pro ostatní přihrádky. Celkem tedy existuje

$$11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 = 11^8 = 214\,358\,881$$

různých osmic taktů.

b) Vzhledem k tomu, že $176 = 8 \cdot 22$, je skladba o 176 taktech složena z 22 osmic taktů. Odtud vypočteme, že

$$(11^8)^{22} \doteq 1{,}9 \cdot 10^{183},$$

což je celkový počet různých skladeb o 176 taktech.

c) Nejprve si vyznačíme všechny možné dvojice teček, které mohou padnout na dvou kostkách (obr. 2a). Pro každý výsledek určíme celkový počet padnutých teček na obou kostkách (obr. 2b).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 |

Obr. 2a

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Obr. 2b

V tab. 2b se nejčastěji vyskytuje číslo 7, tedy osmice taktů v řádku s číslem 7 má největší šanci, že bude tímto náhodným procesem vytvořena.

d) K vytvoření takové osmice taktů dojde, pokud v osmi po sobě jdoucích hodech padne součet 7. Pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padne součet 7, vypočteme jako (využijeme tab. 2)

$$P(\text{součet } 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Odtud plyne, že uvažovaná osmice vznikne s pravděpodobností

$$P(8\text{krát součet } 7) = \left(\frac{1}{6}\right)^8 \doteq 0{,}000\,000\,595.$$