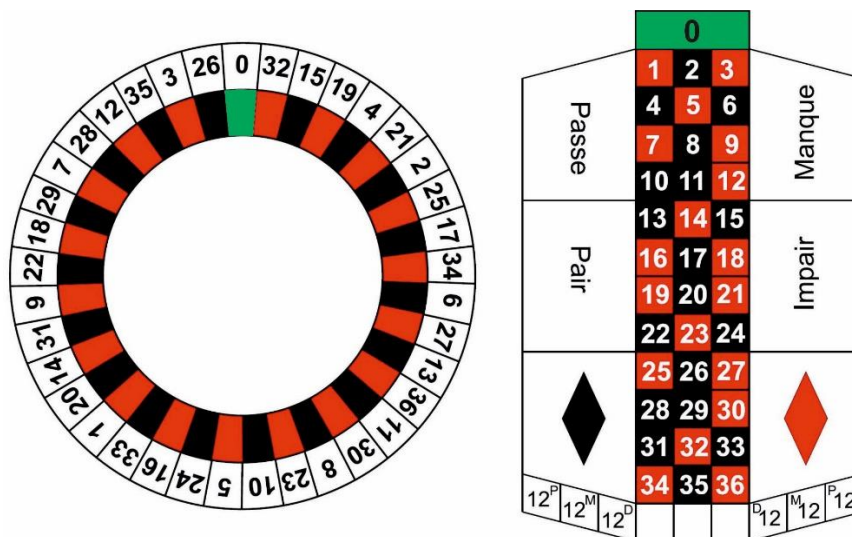


Kasino a matematika – SŠ – řešení

Ve videu se mluví o hazardní hře *ruleta*, na kterou se nyní podíváme z pohledu matematiky. Budeme se zabývat tzv. evropskou ruletou, jejíž hrací kolo a sázeční deska jsou na obr. 1.



Obr. 1

Obvykle ke zkoumání výherních šancí či očekávané výhry využívá oblast matematiky zvaná teorie pravděpodobnosti. Ukažme si (viz úloha 1), že matematika zásadně ovlivnila již samotnou „konstrukci“ rulety.

- 1) Víme, že tvůrci rulety ze všech možných přirozených čísel vybrali právě číslo 36, které je pro tuto hru klíčové. To nebyla náhoda, ale záměr, který souvisí s počtem dělitelů čísla 36. Čím více dělitelů, tím více různých druhů sázek (viz úloha 2).
 - a) Určete počet všech přirozených dělitelů čísla 36.
 - b) Ukažte, že žádné přirozené číslo menší než 36 nemá stejně nebo více dělitelů než číslo 36.
 - c) Najděte v literatuře nebo na internetu vzorec, který udává počet dělitelů přirozeného čísla.
 - d) Najděte nejmenší přirozené číslo větší než 36, které má stejný počet dělitelů jako číslo 36.

a) Všechny přirozené dělitele čísla 36 si vypíšeme a dostaneme

1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

Číslo 36 má celkem 9 různých dělitelů.

b) Vytvoříme tabulku přirozených čísel a každému z nich určíme počet dělitelů. Vzhledem k tomu, že každé prvočíslo má právě dva různé dělitele, nebudeme prvočísla v tabulce uvádět.

číslo	4	6	8	9	10	12	14	15	16	18	20	21
# dělitelů	3	4	4	3	4	6	4	4	5	6	6	4

číslo	22	24	25	26	27	28	30	32	33	34	35	36
# dělitelů	4	8	3	4	4	6	6	6	4	5	4	9

c) Platí následující tvrzení:

Počet všech dělitelů přirozeného čísla n , jehož prvočíselný rozklad je dán výrazem

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m},$$

je roven součinu

$$(k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot \dots \cdot (k_m + 1).$$

S využitím tohoto vztahu snadno ověříme, že 36 má 9 dělitelů, neboť

$$36 = 2^2 \cdot 3^2, \quad \text{a tedy } (2 + 1) \cdot (2 + 1) = 9.$$

d) Hledáme nejmenší přirozené číslo větší než 36, které má právě 9 dělitelů. Vzhledem k předešlému tvrzení dostáváme buď podmínku

$$(k_1 + 1) = 9,$$

nebo podmínku

$$(k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) = 9.$$

Nejmenší číslo splňující první podmínku je

$$2^8 = 256.$$

Nejmenší číslo splňující druhou podmínku je

$$2^2 \cdot 5^2 = 100.$$

Hledaným číslem je tedy číslo 100.

2) Tabulka 1 obsahuje možné sázky v ruletě a odpovídající výplatu za správný tip. Ověřte, že bez ohledu na zvolený druh sázky je očekávaný zisk kasina ve výši $1/37$, tj. cca 2,7% vsazené částky.

číslo sázky	sázka na	Výhra za správný tip (násobek vkladu)
1.	jedno číslo	36
2.	2 čísla	18
3.	3 čísla (řádek)	12
4.	4 čísla (čtverec)	9
5.	6 čísel (dva řádky)	6
6.	12 čísel (sloupec nebo 12^P nebo 12^M nebo 12^D)	3
7.	18 čísel (červená, černá, sudá, sudá, lichá, 1-18, 19-36)	2
8.	24 čísel (dva sloupce)	1,5

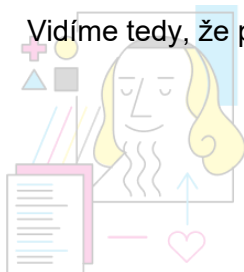
tab. 1.

Uvažujme pro jednoduchost, že budeme sázet vždy 370 Kč.

1. Nejprve spočítáme očekávanou výhru při sázce na jedno číslo. Po skončení losování nám bude vyplacena výhra $370 \cdot 36$ Kč (pokud padlo naše vsazené číslo) nebo vklad prohraje. První možnost nastává s pravděpodobností $1/37$, druhá s pravděpodobností $36/37$. Odtud již snadno vypočteme očekávanou (střední) hodnotu výhry:

$$370 \cdot 36 \cdot \frac{1}{37} + 0 \cdot \frac{36}{37} = 360$$

Vidíme tedy, že po skončení hry máme v průměru o 10 Kč méně než na jejím začátku.



2. Podobně jako v předešlém případě nám bude po losování vyplacena výhra $370 \cdot 18$ Kč (pokud padlo jedno ze dvou námi tipovaných čísel) nebo vklad prohrajeme. První možnost nastává s pravděpodobností $2/37$, druhá s pravděpodobností $35/37$. Odtud vypočteme očekávanou (střední) hodnotu výhry jako:

$$370 \cdot 18 \cdot \frac{2}{37} + 0 \cdot \frac{35}{37} = 360$$

Zase máme v průměru o 10 Kč méně než na začátku hry.

Dále už uvedeme jen vlastní výpočty pro jednotlivé druhy sázek:

3.

$$370 \cdot 12 \cdot \frac{3}{37} + 0 \cdot \frac{34}{37} = 360$$

4.

$$370 \cdot 9 \cdot \frac{4}{37} + 0 \cdot \frac{33}{37} = 360$$

5.

$$370 \cdot 6 \cdot \frac{6}{37} + 0 \cdot \frac{31}{37} = 360$$

6.

$$370 \cdot 3 \cdot \frac{12}{37} + 0 \cdot \frac{25}{37} = 360$$

7.

$$370 \cdot 2 \cdot \frac{18}{37} + 0 \cdot \frac{19}{37} = 360$$

8.

$$370 \cdot 1,5 \cdot \frac{24}{37} + 0 \cdot \frac{13}{37} = 360$$

Vidíme, že všechny sázky jsou pro kasino stejně výhodné a přinášejí průměrný zisk 2,7% vsazené částky.



Autoři: Eduard Fuchs, Pavel Tlustý, Eva Zelendová

Toto dílo je licencováno pod licencí Creative Commons [CC BY-NC 4.0]. Licenční podmínky navštivte na adrese [<https://creativecommons.org/choose/?lang=cs>].

